ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАРЫ

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

NATURAL SCIENCES

ҒТАМР 30.03.19 https://doi.org/10.55956/OBTK1024

Б. Сағындықов

Физика-математика ғылымдарының кандидаты,
қауымдастырылған профессор
Satbayev University, Алматы, Қазақстан.
b.sagindykov@satbayev.university

БІРӨЛШЕМДІ КОНСЕРВАТИВТІ ЖҮЙЕНІ ЗЕРТТЕУ ӘДІСІ

Аңдатпа. *Мақалада потенциалдық, стационарлық сыртқы өрісте еркіндік дәрежесі бірге тең жүйелердің қозғалыстары теориялық механика заңдарын қолданып зерттелген. Жүйені зерттеу мақсатында Лагранж функциясының мынадай жалпылама түрі қолданылды [1,2]:* $L=\frac{1}{2}\,a(q)\,\dot{q}^2-\mathcal{U}(q)$ *Егер бөлшекке әсер ететін* F *күші тек* x *координатасына тәуелді болса Лагранж функциясы төмендегідей түрленеді: [1,2]*

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\mathcal{U}(x)$$

мұндағы, $\mathcal{U}(x)=-\int_0^x F(\eta)\,d\eta$

Қарстырып отырған жағдайда $q=x$, $a(q)=m=const$. *Жазық математикалық, физикалық, циклонды маятниктер үшін Лагранж теңдеуін төмендегідей түрде жаздық [3,4]:*

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mgl\cos\varphi$$

Мұндағы, $q=\varphi$, $a(q)=ml^2$

$$L=\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}+mg\,l\cos\varphi$$

Мұндағы, J шиналу осімен салыстырғандағы инерция моменті, l айналу осімен массалар орталығына дейінгі арақашықтық, қарастырылыа отырған жағдай үшін $q=\varphi$, $a(q)=J$

$$x=R(\alpha-\sin\alpha),\ y=-R(1-\cos\alpha).$$

Кез-келген консервативті жүйе үшін сақталу заңы орындалады:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\,a(q)\dot{q}^2+\mathcal{U}(q)=const \qquad (1)$$

Лагранж функциясы және энергияның сақталу заңдарын қолданып бірөлшеиді кеңістіктегі бөлшектің қозғалысы зерттелді.

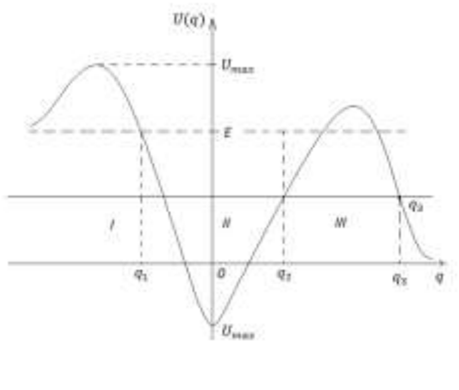
Тірек сөздер: *еркіндік дәреже, инерция моменті, лагранж функциясы, консервативті жүйе.*

Кіріспе. Механика қозғалыс заңдарын зерттейтін ғылым болғандықтан, табиғаттың барлық заңдарына, техникалардың механизмдерінің, аспан денелерінің, ғарыштың, элементар бөлшектердің қозғалыстарына қатысы бар. Механиканың заңдарына Жер бетіндегі тірі организмдердің, мұхиттар мен теңіздердегі балықтардың, киттердің, дельфиндердің аспан денелерінің, элементар бөлшектердің қозғалыстары бағынады. Механиканың заңдарын толық меңгермей машиналар механизмдерінде, металлургияда, синтетикалық полимерді өндіруде, пайдалы қазбаларды алуда, жеңіл өнеркәсіпте өтетін үдерістерді, жан-жақты талқылап, есептеу жұмыстарын жүргізу мүмкін емес. Сондықтан теориялық механика заңдарын қолданып физикалық үдерістер мен құбылыстарды зерттеу ғылымның өзекті мәселелеріне жатады.

Зерттеу шарттары мен әдістері және нәтижелері. Көптеген жағдайларда берілген еркіндік дәрежесі бірге тең есептерді физикалық заңдылықтарын шешпей, сапалы талдау негізінде сипаттауға болады. Ол үшін энергияның сақталу (1) заңын пайдаланамыз. Кинетикалық энергия теріс мәндерді иеленбейтіндіктен, жүйенің қозғалыстары мына шарт орындалатын аймақтарда қозғала алады:

$$E \geq \mathcal{U}(q) \qquad (2)$$

Потенциалдық энергия 1 - суретте көрсетілгендей координатаға тәуелді болсын делік.



1 - сурет.

Потенциалдық энергияның координатаға тәуелділігі

Берілген Е энергияның мәндерінде мына аймақтар шығады:

I. $-\infty < q < q_1$ қозғалыс мүмкін емес.

II. $q_1 < q < q_2$ қозғалыс кеңістіктің шектелген бөлігінде өтеді. Қозғалыс финитті.

III. $q_2 < q < q_1$ қозғалыс бар. Қозғалыс инфинитті.

IV. $q_1 < q < +\infty$ қозғалыс шектелмеген, бөлшек шексіздікке кетеді.

Егер $\mathcal{U}_{min} > \mathrm{E}$ болса, қозғалыс болмайды. Ал $\mathcal{U}_{max} < \mathrm{E}$ болса, қозғалыс оң және сол жақтарымен шектелмеген. Бірөлшемді финитті қозғалыс әрқашан периодты, тербелмелі қозғалыс жасайды. Ол потенциалдық энергиясы минимум болған орнықты тепе-теңдік айналасында өтеді. Мұндай қозғалыста координата q, q_1 ден q_2 өзгереді. q_1 мен q_2 мына теңдіктен анықталады:

$$\mathrm{E} = \mathcal{U}(q) \qquad (3)$$

Тербелістің периоды $q_2 \quad -q_1$ кесіндісін жүруге кеткен уақытты екі еселегенге тең:

$$\mathrm{T} = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{2a(q)}{\mathrm{E}-\mathcal{U}(q)}}\,dq \qquad (4)$$

Кері есептің шешімін қарастырайық

$a(q) = a = const$ болса, периодтың масса (a) мен энергия (E) тәуелділігінен потенциалдық энергияны табамыз:

Ауырлық өріске $(\bar{g})$ орналасқан, ұзындығы l созылмайтын және ілінген масса m бөлшектің қозғалысыны зерттейік. Математикалық маятникті бірөлшемді консервативті жүйе ретінде қарастыруға болады. Біз маятниктің жазықтықтағы қозғалысымен шектеліп, әртүрлі әдістермен оның қозғалыс теңдеуін қорытып шығарамыз.

а) Ньютонның екінші заңын қолданамыз

$$m\vec{w} = \vec{F} = \vec{R} + \overrightarrow{mg} \qquad (5)$$

Теңдеуді жанамамен бағытталған $\vec{\tau}$ өсіне проекциялаймыз: Төмендегі теңдіктерді:

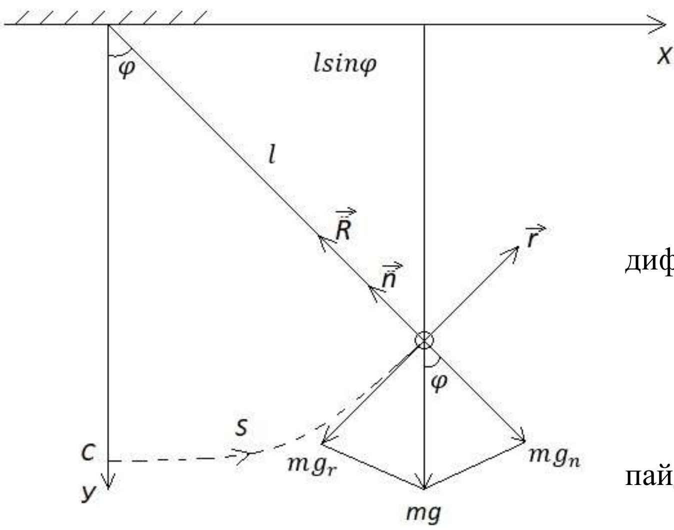
$w_\tau = \ddot{S}$, $R_t = 0$, $g_\tau = -g\sin\varphi$ (6)

$S = l\varphi$ ескерсе, (6) теңдік төмендегідей түрленеді:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

немесе

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad (7)$$



2 - сурет.

Математикалық маятниктің қозғалысын сипаттайтын сызба

ә) Импульс моментінің өзгерісі туралы теореманы пайдаланамыз:

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_R} + \overrightarrow{M_g} = \frac{\overrightarrow{dL}}{dt} \qquad (8)$$

Қозғалыс жазықтықта өтетін болғандықтан $\vec{L}$, $\overrightarrow{M_R}$, $\overrightarrow{M_S}$ векторлары суреттің жазықтығына перпендикуляр түзудің бойымен бағытталған. Сондықтан O нүктесімен салыстырғанда мына өрнектерді аламыз:

$$|\vec{L}| = ml^2\dot{\varphi}\,,\ |M_R| = 0\,,$$
$$|M_g| = -\ mg\,l\sin\varphi \qquad (9)$$

(8) теңдікке қойсақ, төмендегі теңдеу шығады:

$$ml^2\ddot{\varphi} = mg\,l\sin\varphi$$

б) Энергияның сақталу заңын қолданамыз:

$$T + U = E = const \qquad (10)$$

немесе

$$\frac{ml^2}{2} - mg\,l\cos\varphi = E \qquad (11)$$

Теңдіктің екі жағын уақыт бойынша дифференциалдайық

$$ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

в) Лагранж функциясын пайдаланайық:

$$L = T - U \qquad (12)$$

Жалпылама координата ретінде φ бұрышын аламыз:

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mg\,l\cos\varphi \qquad (13)$$

Лагранж теңдеуі төмендегідей түрленеді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \qquad (14)$$

(13) өрнектің көмегімен қайтадан (8) өрнекті аламыз:

г)Гамильтон функциясын қолданамыз:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{E}}{\dot{\varphi}} = \boldsymbol{f}\left(\mathrm{p}_{\varphi}, \varphi, \mathrm{t}\right) \qquad (15)$$

немесе

$$\mathrm{P}_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\varphi$$

бұдан

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{P}_{\varphi}}{ml^2}$$

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{P}_{\varphi}^2}{2ml^2} - mg\,l\cos\varphi \qquad (16)$$

Гамильтон канондың теңдеулері:

$$\dot{\mathrm{P}}_{\varphi} = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\mathrm{P}_{\varphi}} \qquad (17)$$

$$\dot{\mathrm{P}}_{\varphi} = -\,mg\,l\sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{P}_{\varphi}}{ml^2} \qquad (18)$$

$$\mathrm{P}_{\varphi} = ml^2\dot{\varphi}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = mg\,l\sin\varphi \qquad (19)$$

(8) теңдеу шықты

д) Гамильтон-Якоби теңдігін пайдаланайық:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{H}\left(\varphi, \frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) = 0 \qquad (20)$$

немесе

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2 - mg\,l\cos\varphi = 0 \qquad (21)$$

Энергия сақталатындықтан, $S-$ тің уақытқа тәуелділігі төмендегі өрнекпен сипатталады:

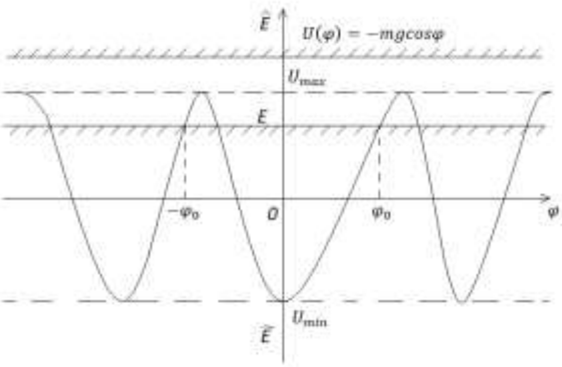
$$S = S_0 - \mathrm{E}t \qquad (22)$$

Бұдан жоғарыдағы теңдеулерді ескерсек, мына қатынас шығады:

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2 - mg\,l\cos\varphi = \mathrm{E} \qquad (23)$$

Қозғалысқа сапалы талдаулар жасау мақсатында потенциалдық энергияның (№3 сурет) графигін қолданайық

$$\mathcal{U}(\varphi) = -\,mg\,l\cos\varphi$$



3-сурет.
Потенциалдық энергияның графигі

а) $\tilde{\mathrm{E}} < \mathcal{U}_{min} = -\,mgl$

Маятник қозғалмайды

ә) $\tilde{E} > \mathcal{U}_{max} = +mgl$

φ бұрыш бойынша маятниктің қозғалысы инфинитивті. Ауытқу бұрышы модулі бойынша $t \to \infty$ ұмтылғанда $+\infty$ немесе $-\infty$ ұмтылады. Бұл маятникке үлкен бастапқы жылдамдық беріп айналдырғанға сәйкес келеді

б) $\mathcal{U}_{min} < \tilde{E} < \mathcal{U}_{max}$

Маятник финитті қозғалады. Тепе-теңдік күші $\varphi = 0$ орындалады.

Маятниктің ауытқу бұрышы, демек тербеліс амплитудасы φ_0 $\varphi = \varphi_0$ нүктесінде кинетикалық энергия нөл болғандықтан, толық энергия мынаған теңеледі:

$$E = -mgl\cos\varphi_0$$

Немесе сақталу заңы бойынша төмендегі теңдік орындалады:

$$\frac{ml^2}{2} - mg\,l\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0$$

Бұрын О-ден φ_0 өзгергендегі период мына формуламен есептеледі:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

$\cos\alpha = 1 - 2sin^2\frac{\alpha}{2}$ формуласын қолдансақ, төмендегі қатынасты аламыз:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{sin^2\frac{\varphi_0}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

немесе

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{sin\frac{\varphi_0}{2}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{sin\frac{\varphi}{2}}{sin\frac{\varphi_0}{2}}}}$$

Интkгралдаудың айнымалысын алмастырамыз

$$К(к) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\eta}{\sqrt{1 - К^2 sin^2\eta}}$$

Тербеліс шамалы болса $(sin^2\frac{\varphi}{2} \ll 1)$ онда түбірдің астында мына қатынас қалады:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

T_0 түзетуді табу үшін интеграл астындағы өрнекті Тейлор қатарына жіктейміз:

$$\left(1 - sin^2\frac{\varphi_0}{2}sin^2\eta\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}sin^2\frac{\varphi_0}{2}sin^2\eta$$

Немесе орындарына қойсақ, төмендегі теңдікті аламыз:

$T = T_0 + T_1$

Мұндағы

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}sin^2\frac{\varphi_0}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2\,d\eta$$
$$= 2\sqrt{\frac{l}{g}}sin^2\frac{\varphi_0}{2}x\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2\eta)d\eta = \sqrt{\frac{l}{g}}sin^2\frac{\varphi_0}{2}\left\{\eta\int_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}sin^2\eta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$
$$= \sqrt{\frac{l}{g}}sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Яғни:

$$T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

Немесе

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Мұндағы, φ_0 тербелістің амплитудасы. Өте үлкен шама. Амплитудасы φ_0=60 жағдайды қарастырамыз.

Бұл жағдайда мына теңдік шығады:

$$\frac{1}{4}sin^2\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16}$$

Ауытқу қанша үлкен болғанмен барлық периодқа енгізілген түзету 6% құрайды. Сондықтан мектеп физика курсында қолданылатын математикалық маятниктің периодының формуласы өте жақсы болып табылады. Келесі T_2 мүшесі $sin^4\frac{\varphi_0}{2}$ шамасына пропорционал, оған T_1 кіші түзету енгізіледі.

Қорытынды. Математикалық маятниктің периодын Ньютонның екінші заңын, импульс моментінің өзгерісі туралы теореманы, энергияның сақталу заңдарын, Лагранж және Гамильтон функциясын қолданып қорытып шығару әдістері көрсетілген. Жоғарыда келтірілген әртүрлі әдістерден шығатын формула біреу болатыны математикалық тұрғыдан дәлелденген.

Сонымен қатар, графиктер арқылы сапалы талдаулар жасауға болатындығы талқыланған.

Әдебиеттер тізімі:

1. Ландау, Л.Д. Лифшиц, Е.М.. Теоретическая физика. Учебное пособие. [Текст] / Л.Д. Ландау Е.М.Лифшиц Том 1. М.: Наука. - 1965, - 204с.
2. Гольдстейн, Г. Классическая механика. Монография. [Текст] / Г.Гольдстейн М.: Наука. -1975, -412с.
3. Семенченко, В.К.. Избранные главы теоретической физики. Учебное пособие. [Текст] / М.:Просвещение. - 1966, - 390с.
4. Левич, В.Г. Курс теоретической физики. Учебник. [Текст] / В.Г.Левич Том 1. М.: Наука. - 1969, - 877с.
5. Бижигитов, Т. Жалпы физика курсы. Оқулық [Мәтін] / Т. Бижигитов Алматы: Экономика. – 2013. - 890 б.
6. Bizigitov, T., .Zhumadilov, E. Methods of mathematical physics. Universitybook. [Text] / Almaty: lantar Books. - 2023, - 370p.
7. Бижигитов,Т. Математикалық физика әдістері. Оқулық. [Текст] / Т.Бижигитов Алматы: Лантар Books - 2022, - 380 б.

Материал 26.02.23 редакцияға түсті.

Б.Сагындыков - *Satbayev University, Алматы, Казахстан.*

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОМЕРНОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. В статье исследуются движения систем с равными степенями свободы в потенциальном, стационарном внешнем поле с использованием законов теоретической механики. В целях изучения системы был использован следующий обобщенный вид функции Лагранжа [1,2]: $L=\frac{1}{2}\,a(q)\,\dot{q}^2-\mathcal{U}(q)$

Если сила F, действующая на частицу, зависит только от координаты x, функция Лагранжа преобразуется следующим образом [1,2]:

$$L=\frac{mx^2}{2}-\mathcal{U}(x)$$

где, , $\mathcal{U}(x)=-\int_0^x F(\eta)\,d\eta$

$q=x$, $a(q)=m=const$. Мы записали уравнение Лагранжа для плоских математических, физических, циклонных маятников следующим образом [3,4]:

$$L=\frac{ml^2}{2}\varphi^2+\text{mglcos}\,\varphi$$

где, $q=\varphi$, $a(q)=ml^2$

$$L=\frac{I\varphi^2}{2}+\text{mg lcos}\,\varphi$$

Момент инерции по сравнению с осью вращения J, расстояние до центра масс с осью вращения l, для рассматриваемого случая $q=\varphi$, $a(q)=$ J

$$x=R(\alpha-\sin\alpha),\ y=-R(1-\cos\alpha).$$

Для любой консервативной системы соблюдается закон сохранения:

$$E=\frac{1}{2}a(q)\,q^2+\mathcal{U}(q)=const$$

Исследовано движение частицы в одномерном пространстве с использованием функции Лагранжа и законов сохранения энергии.

Ключевые слова: степень свободы, момент инерции, функция Лагранжа, консервативная система.

B. Sagyndykov - *Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*

A METHOD FOR INVESTIGATING A ONE-DIMENSIONAL CONSERVATIVE SYSTEM

Abstract. The article examines the movements of systems with equal degrees of freedom in a potential, stationary external field using the laws of theoretical mechanics. In order to study the system, the following generalized form of the Lagrange function was used [1,2]: $L=\frac{1}{2}\,a(q)\,\dot{q}^2-\mathcal{U}(q)$

If the force F acting on a particle depends only on the x coordinate, the Lagrange function is transformed as follows [1,2]:

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\mathcal{U}(x)$$

где, , $\mathcal{U}(x)=-\int_0^x F(\eta)\,d\eta$

$q=x$, $a(q)=m=const$.

We have written down the Lagrange equation for plane mathematical, physical, and cyclonic pendulums as follows [3,4]:

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

где, $q = \varphi$, $a(q) = ml^2$

$$L = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mg\, l\cos\varphi$$

The moment of inertia compared to the axis of rotation J, the distance to the center of mass with the axis of rotation l, for the case under consideration $q = \varphi$, $a(q) = J$

$$x = R(\alpha - \sin\alpha),\ y = -R(1 - \cos\alpha).$$

For any conservative system, the law of conservation is respected:

$$E = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + U(q) = const$$

The motion of a particle in one-dimensional space is investigated using the Lagrange function and the laws of conservation of energy.

Keywords: degree of freedom, moment of inertia, Lagrange function, conservative system.

References

1. Landau, L.D. Lifshits, E.M. Theoretical physics. A study guide. [Text] / L.D. Landau, E.M.Lifshits Volume 1. Moscow: Nauka. - 1965, - 204s.
2. Goldstein, G. Classical Mechanics. Monograph. [Text] / G.Goldstein M.: Nauka. -1975, - 412c.
3. Semenchenko, V.K. Selected chapters of theoretical physics. A study guide. [Text] / M.:Enlightenment. - 1966, - 390s.
4. Levich, V.G. Course of theoretical physics. Textbook. [Text] / V.G.Levich Volume 1. Moscow: Nauka. - 1969, - 877c.
5. Bizhigitov, T. Course of general physics. Textbook [Text] / T. Bizhigitov Almaty: Economics. - 2013. - 890 p.
6. Bizigitov, T., Zhumadilov, E.. Methods of mathematical physics. Universitybook. [Text] / Almaty: lantar Books. - 2023, - 370p.
7. Bizhigitov, T. methods of Mathematical Physics. The textbook. [Text] / T. Bizhigitov Almaty: Lantar Books-2022, - 380 P.

Мақалаға сілтеме: *Сағындықов, Б. Бірөлшемді консервативті жүйені зерттеу әдісі [Мәтін] / Б.Сағындықов // Dulaty University Хабаршысы. – 2024. - №2. – Б. 233-240* https://doi.org/10.55956/OBTK1024